Analisis dan Visualisasi Representasi Deret Fourier Gelombang Sinyal Periodik Menggunakan MATLAB

Ahmad Saudi Samosir

Jurusan Teknik Elektro Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
ahmad.saudi@eng.unila.ac.id

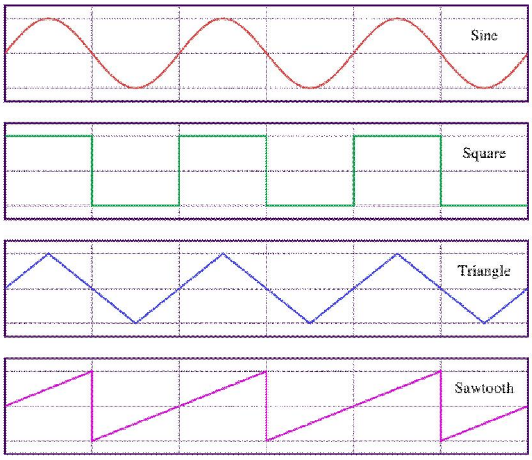
Intisari---**Tulisan ini membahas tentang penggunaan program MATLAB untuk memvisualisasikan representasi deret fourier dari gelombang sinyal periodik. Sebagai contoh kasus diambil dua buah sinyal yang sangat sering digunakan sebagai sinyal masukan pada rangkaian listrik dan elektronika yaitu sinyal gelombang gigi gergaji dan sinyal gelombang persegi.**
Kata kunci---**gelombang sinyal periodik, gelombang gigi gergaji, gelombang persegi, deret fourier.**

Abstract---**This paper discusses the use of MATLAB program to visualize the Fourier series representation of a periodic signal waveform. As an example case, the analysis is done for two periodic signals that are often used as an input signal to the electrical and electronic circuit is a sawtooth wave signal and a square wave signal.**
Keywords---**periodic signal wave, sawtooth wave, square wave, Fourier series.**

I. PENDAHULUAN

Sinyal masukan yang merupakan fungsi periodik banyak digunakan pada dunia keteknikan (engineering). Dari sekian banyak bentuk sinyal yang sering digunakan pada dunia keteknikan, khususnya dalam analisa rangkaian listrik dan elektronika di Teknik Elektro, terlihat bahwa terdapat sinyal masukan yang berbentuk sinusoidal, tetapi banyak juga sinyal masukan yang berbentuk bukan sinusoidal.

Untuk rangkaian listrik yang menggunakan sinyal masukan sinusoidal, analisanya dapat dilakukan dengan mudah menggunakan metoda phasor [1-2], tetapi untuk sinyal masukan yang bukan sinusoidal, hal ini tidak dapat dilakukan. Padahal sangat banyak sinyal sinyal penting yang sering digunakan merupakan gelombang sinyal periodik yang bukan sinusoidal, diantaranya gelombang gigi gergaji (sawtooth wave), gelombang persegi (square wave) dan gelombang sinus terpotong seperti gelombang keluaran dari rangkaian penyearah (rectifier), baik peyearah setengah gelombang maupun peyearah gelombang penuh.



Gbr. 1 Bentuk gelombang sinyal periodik

Beberapa contoh bentuk gelombang periodik dapat dilihatkan pada gambar 1, terdiri dari gelombang sinusoidal (*sine*), gelombang persegi (*square*), gelombang segitiga (*triangle*) dan gelombang gigi gergaji (*sawtooth*).

Bila ditinjau dari bentuknya, bentuk gelombang yang disebutkan diatas mempunyai satu kesamaan sifat, yaitu semuanya merupakan sebuah fungsi waktu f(t) yang periodik dengan perioda T, atau dapat dituliskan:

$$f(t) = f(t+T)$$

II. DERET FOURIER DARI FUNGSI PERIODIK

Suatu fungsi f(t) dikatakan mempunyai periode T atau periodik dengan periode T jika untuk setiap t berlaku f(t+T) = f(t), dimana T konstanta positif. Nilai terkecil T dinamakan periode terkecil atau disingkat periode f(t).

Dengan menggunakan teknik Deret Forier, setiap fungsi periodik dapat direpresentasikan sebagai penjumlahan tak hingga dari sederetan besaran sinusoidal. Teknik ini diperkenalkan pertama kali oleh seorang ahli matematika dan fisika francis bernama Jean Baptiste Joseph Forier (1768-1830) [1].

Deret Fourier adalah suatu deret yang mengandung suku-suku sinus dan cosinus yang digunakan untuk merepresentasikan fungsi-fungsi periodik secara umum. Selain itu, deret ini sering dijadikan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial [3].

Fungsi periodik $f(t) = f(t+T)$ dapat dituliskan dalam sebuah deret penjumlahan yang disebut Deret Forier dengan uraian seperti berikut:[4]

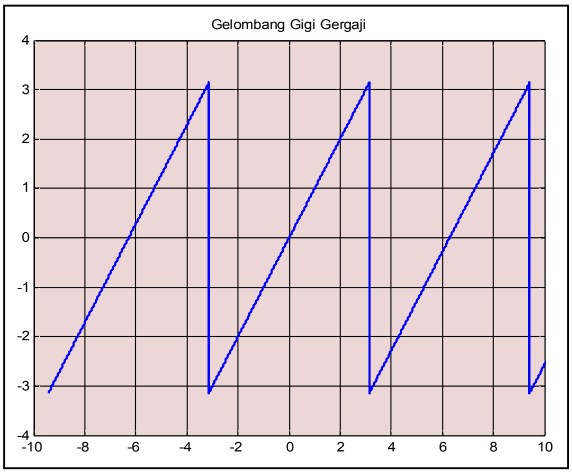
$$f(t) = a_o + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} a_n \cos \mathrm{n}\omega_{\mathrm{o}}\ \mathrm{t} + \mathrm{b_n} \sin \mathrm{n}\omega_{\mathrm{o}}\ \mathrm{t}$$

dimana koefisien Fourier a_0, a_n dan b_n ditentukan dengan persamaan:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos \mathrm{n}\omega_{\mathrm{o}}\ \mathrm{t}\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin \mathrm{n}\omega_{\mathrm{o}}\ \mathrm{t}\, dt$$



Gbr. 2 Gelombang Gigi Gergaji (sawtooth wave)

III. STUDI KASUS

Pada pembahasan ini, sebagai contoh kasus diambil dua buah sinyal yang sangat sering digunakan sebagai sinyal masukan pada rangkaian elektronika dan rangkaian listrik yaitu sinyal gelombang gigi gergaji dan sinyal gelombang persegi. Masing masing gelombang sinyal akan di tentukan persamaan matematisnya dengan mencari uraian deret fouriernya.

A. Gelombang Gigi Gergaji (sawtooth wave)

Sebagai contoh kasus pertama kita tentukan deret fourier dari gelombang gigi gergaji yang diperlihatkan pada gambar 2. Representasi deret forier dari setiap gelombang periodik dapat dituliskan sbb:

$$f(t) = a_o + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} a_n \cos \mathrm{n}\omega_{\mathrm{o}}\ \mathrm{t} + \mathrm{b_n} \sin \mathrm{n}\omega_{\mathrm{o}}\ \mathrm{t}$$

Koefisien a_0 ditentukan dengan perhitungan

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = \frac{1}{2\pi} t^2 \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^2 - (-\pi)^2\right)$$

Sehingga diperoleh

$$a_0 = 0$$

Koefisien a_n dihitung untuk n = 1, 2, 3, … dengan perhitungan sbb:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt \, dt$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}(\cos nt - nt \sin nt)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

disini juga diperoleh

$$a_n = 0$$

Berikutnya koefisien b_n juga dihitung untuk n = 1, 2, 3, … Hasil perhitungan sbb:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{n^2\pi}(\sin nt - nt \cos nt)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = -\frac{2 \cos n\pi}{n}$$

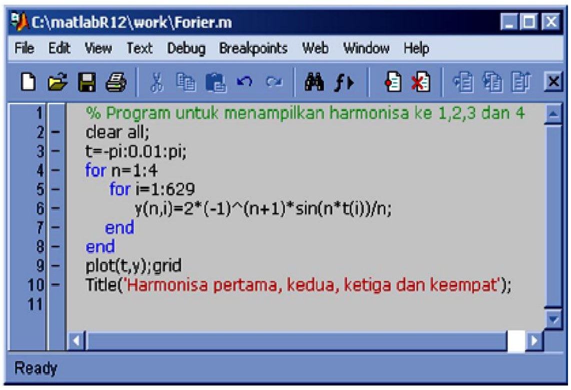
$$b_n = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}$$

Sehingga uraian deret fourier dari gelombang gigi gergaji dapat dituliskan:

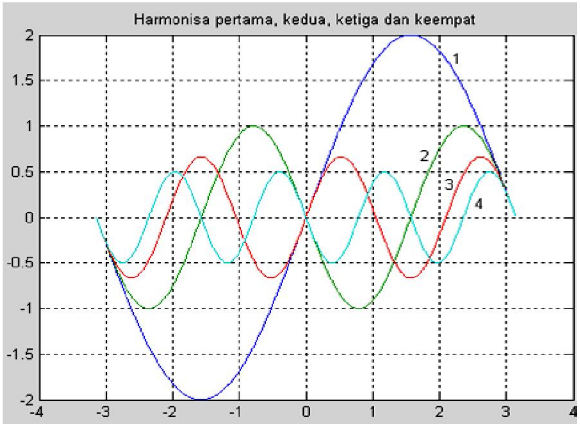
$$\boxed{f(t) = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \cdots\right)}$$

B. Visualisasi Gelombang Gigi Gergaji menggunakan MATLAB

Untuk menampilkan grafik masing masing harmonisa dari fungsi f(t) dapat dilakukan dengan menggunakan program Matlab [5-6]. Program ini dibuat berupa file teks berekstensi ‘m’ (m file) [6]. Program untuk memperlihatkan gelombang harmonisa pertama, kedua, ketiga dan keempat dari fungsi f(t) diperlihatkan pada gambar 3, dan hasil keluaran dari program pada gambar 3 diperlihatkan seperti pada gambar 4.



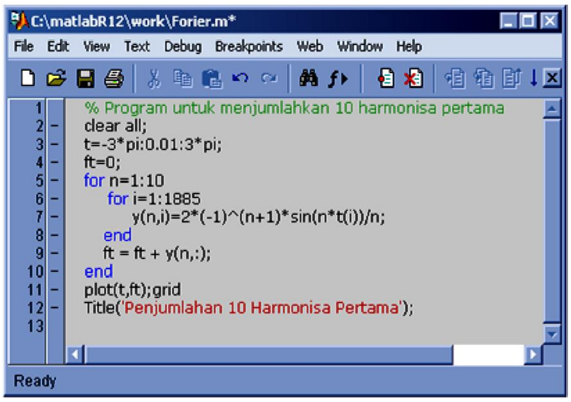
Gbr. 3 Program untuk menampilkan harmonisa ke 1,2,3 dan 4 dari fungsi f(t)



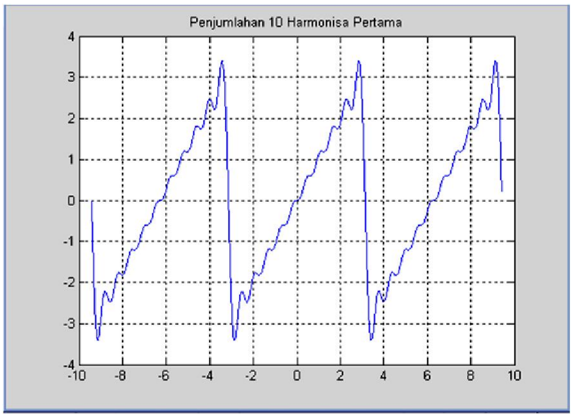
Gbr. 4 harmonisa pertama, kedua, ketiga dan keempat dari fungsi f(t)

Bentuk gelombang gigi gergaji akan diperoleh dengan cara menjumlahkan setiap suku dari f(t) yang merupakan uraian deret forier dari gelombang gigi gergaji.

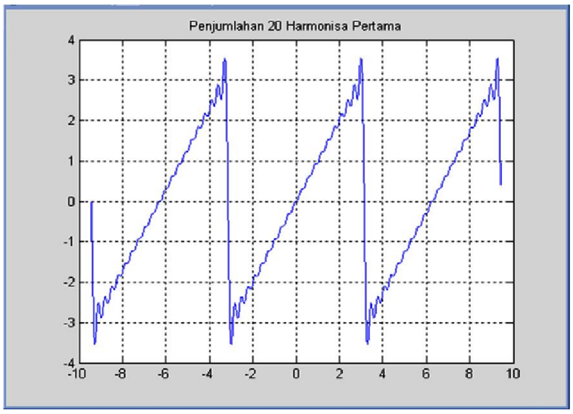
Program untuk menjumlahkan 10 suku pertama dari persamaan fungsi f(t) diperlihatkan pada gambar 5. Hasil penjumlahan beberapa harmonisa pertama dari f(t) memberikan hasil seperti pada gambar 6, 7 dan 8.



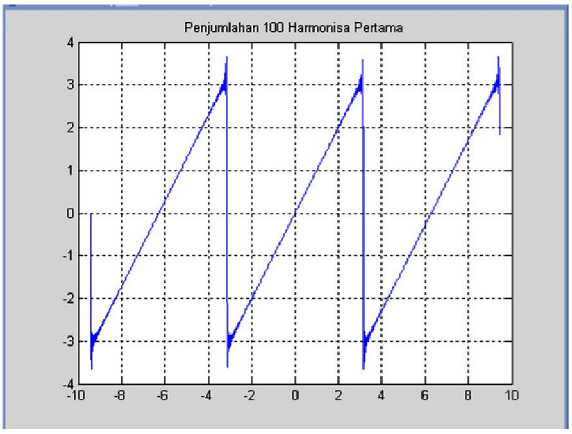
Gbr. 5 Program untuk menjumlahkan 10 suku pertama dari fungsi f(t)



Gbr. 6 Penjumlahan 10 suku pertama dari fungsi f(t)



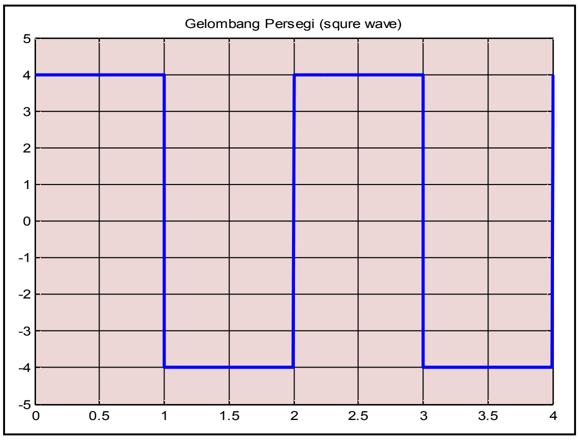
Gbr. 7 Penjumlahan 20 suku pertama dari fungsi f(t)



Gbr. 8 Penjumlahan 100 suku pertama dari fungsi f(t)

C. *Gelombang Persegi (square wave)*

Sebagai contoh kasus kedua kita tentukan Deret Forier dari Gelombang Persegi seperti diperlihatkan pada gambar 9.



Gbr. 9 Gelombang Gigi Persegi (square wave)

Representasi Deret Forier dari setiap gelombang periodik:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t$$

Koefisien a_0 ditentukan dengan perhitungan

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 4\,dt + \int_1^2 -4\,dt\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}(4-4)$$

Sehingga diperoleh

$$a_0 = 0$$

Koefisien a_n dihitung untuk n = 1, 2, 3, … dengan perhitungan sbb:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 4\cos n\pi t\,dt + \int_1^2 -4\cos n\pi t\,dt\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\sin n\pi t\Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi}\sin n\pi t\Big|_1^2\right)$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin 0 - \sin n2\pi + \sin n\pi\right)$$

disini juga diperoleh

$$a_n = 0$$

Berikutnya koefisien b_n juga dihitung untuk n = 1, 2, 3, … Hasil perhitungan sbb:

$$b_n = \frac{2}{2}\left(\int_0^1 4\sin n\pi t\,dt + \int_1^2 -4\sin n\pi t\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}\left(-\cos n\pi t\Big|_0^1 + \cos n\pi t\Big|_1^2\right)$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}\left(-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi\right)$$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}\left(2 - 2\cos n\pi\right)$$

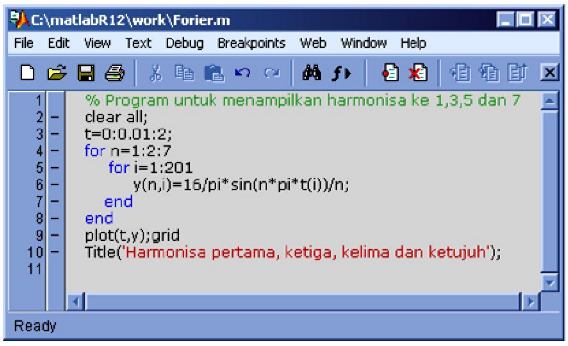
$$b_n = \frac{8}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Sehingga uraian deret fourier dari gelombang persegi pada gambar 9 dapat dituliskan:

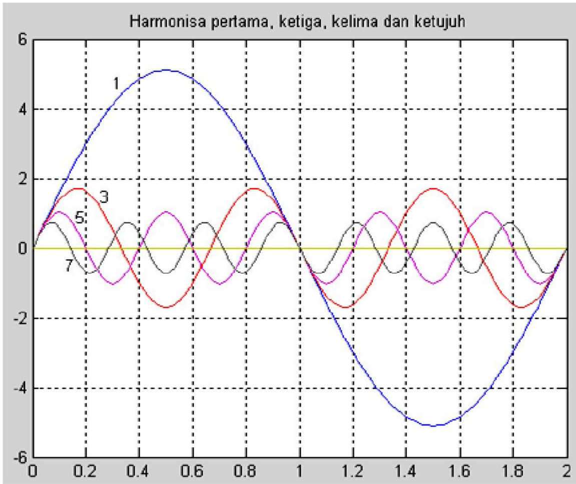
$$\boxed{f(t) = \frac{16}{\pi}\left(\frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \frac{\sin 7\pi t}{7} + \cdots\right)}$$

D. Visualisasi Gelombang Persegi menggunakan MATLAB

Untuk menampilkan grafik masing masing harmonisa dari fungsi f(t) dilakukan dengan menggunakan program Matlab. Program untuk memperlihatkan gelombang harmonisa pertama, kedua, ketiga dan keempat dari fungsi f(t) diperlihatkan pada gambar 10, dan hasil keluaran dari program tsb diperlihatkan seperti pada gambar 11.



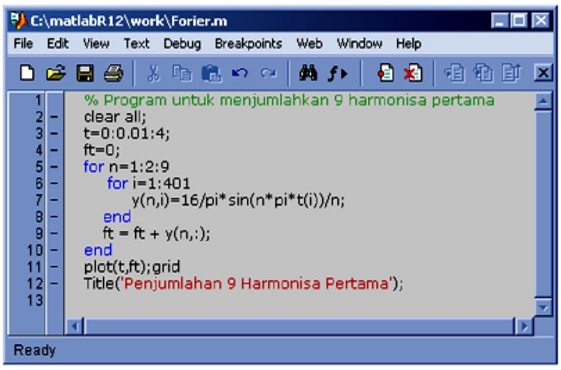
Gbr. 10 Program untuk menampilkan harmonisa ke 1,2,3 dan 4 dari fungsi f(t)



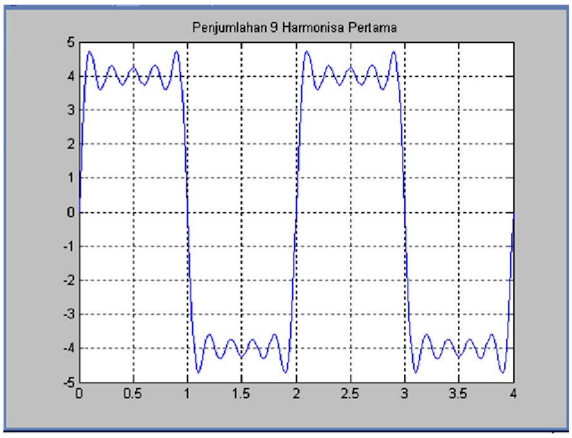
Gbr. 11 harmonisa pertama, kedua, ketiga dan keempat dari fungsi f(t)

Bentuk gelombang persegi akan diperoleh dengan cara menjumlahkan setiap suku dari f(t) yang merupakan uraian deret forier dari gelombang persegi.

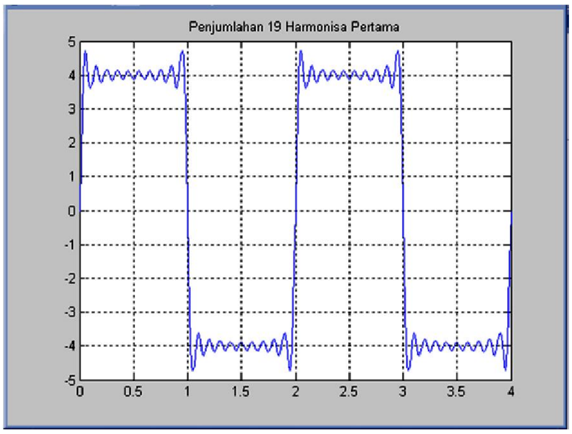
Program untuk menjumlahkan 9 suku pertama dari persamaan fungsi f(t) diperlihatkan pada gambar 12. Hasil penjumlahan beberapa harmonisa pertama dari f(t) memberikan hasil seperti pada gambar 13, 14 dan 15.



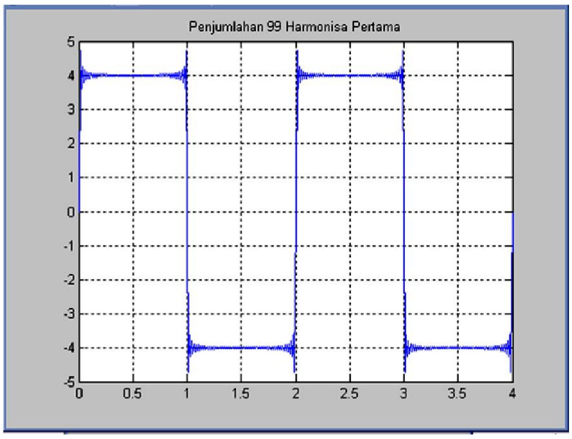
Gbr. 12 Program untuk menjumlahkan 10 suku pertama dari fungsi f(t)



Gbr. 13 Penjumlahan 9 suku pertama dari fungsi f(t)



Gbr. 14 Penjumlahan 19 suku pertama dari fungsi f(t)



Gbr. 15 Penjumlahan 99 suku pertama dari fungsi f(t)

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada contoh kasus gelombang gigi gergaji, hasil simulasi program menunjukkan bahwa representasi deret forier dari sebuah gelombang gigi gergaji (sawtooth wave) yang diberikan dengan persamaan:

$$\boxed{f(t) = 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \cdots\right)}$$

telah terbukti kebenarannya melalui visulisasi bentuk gelombang hasil keluaran program yang diperlihatkan pada gambar 5, 7 dan 9. pada gambar 5 terlihat bahwa bentuk gelombang hasil penjumlahan dari 10 suku pertama dari persamaan f(t) telah mengarah ke bentuk gelombang gigi gergaji. Dari gambar 7 terlihat bahwa dengan menjumlahkan 20 suku pertama dari persamaan f(t) akan dihasilkan bentuk gelombang gigi gergaji yang lebih jelas.

Bila suku yang dijumlahkan semakin banyak maka bentuk gelombang hasil penjumlahan suku sukunya akan menunjukkan bentuk gelombang gigi gergaji yang lebih baik, seperti diperlihatkan pada gambar 9 yang merupakan bentuk gelombang hasil penjumlahan dari 100 suku pertama dari persamaan f(t).

Dari ketiga gambar tersebut dapat dimengerti bahwa bila penjumlahan suku suku dari persamaan f(t) diteruskan sampai n = tak hingga, maka akan dihasilkan bentuk gelombang gigi gergaji yang benar benar mulus seperti bentuk aslinya (gambar 1).

Pada contoh kasus gelombang persegi, representasi deret forier dari gelombang persegi (square wave) yang diperlihatkan pada gambar 10 diberikan dengan persamaan:

$$f(t) = \frac{16}{\pi}\left(\frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \frac{\sin 7\pi t}{7} + \cdots \right)$$

Hasil simulasi program telah membuktikan kebenarannya melalui visulisasi bentuk gelombang hasil keluaran program yang diperlihatkan pada gambar 14, 16 dan 18.

Pada gambar 14 terlihat bahwa bentuk gelombang hasil penjumlahan dari 9 suku pertama dari persamaan f(t) telah mengarah ke bentuk gelombang persegi. Pada gambar 16 terlihat bahwa dengan menjumlahkan 19 suku pertama dari persamaan f(t) akan dihasilkan bentuk gelombang persegi yang lebih jelas. Dengan menambahkan suku semakin banyak maka bentuk gelombang hasil penjumlahan suku sukunya akan menunjukkan bentuk gelombang persegi yang lebih baik, seperti diperlihatkan pada gambar 18 yang merupakan bentuk gelombang hasil penjumlahan dari 99 suku pertama dari persamaan f(t).

Dari ketiga gambar tersebut dapat dimengerti bahwa bila penjumlahan suku suku dari persamaan f(t) diteruskan sampai n = tak hingga, maka akan dihasilkan bentuk gelombang persegi yang benar benar mulus seperti bentuk aslinya (gambar 10).

V. KESIMPULAN

Makalah ini membahas visualisasi Deret Fourier dari Gelombang sinyal periodik mengunakan pemrograman matlab. Dari hasil simulasi terlihat bahwa sinyal gelombang segitiga dan sinyal gelombang persegi dapat direpresentasikan sebagai penjumlahan tak berhingga dari fungsi fungsi sinusoidal menggunakan Deret Fourier, dan bila setiap suku suku dari uraian Deret Forier dari sebuah gelombang periodik dijumlahkan sampai n = tak hingga, maka akan dihasilkan bentuk gelombang yang sama persis seperti bentuk gelombang aslinya.

REFERENSI

[1] David E. Johnson, Johnny R. Johnson dan John L. Hilburn, 1992, “Electric Circuit Analysis, Second Edition”, Prentice-Hall, Inc.

[2] Joseph A. Edminister, Mahmood Nahvi, “Rangkaian Listrik”, Schaum’s Outlines, Edisi Empat, 2004.

[3] Irpan Susanto, “Deret Fourier, Konsep dan Terapannya Pada Persamaan Gelombang Satu Dimensi”, Skripsi, Universitas Negeri Smarang, 2011.

[4] Edwards, C.H dan Penney, D.E., “Elementary Differential Equations With Boundary Value Problems”, University of Georgia, 1989.

[5] Noname, 1992,“The Student Edition of MATLAB”, Prentice-Hall, Inc.

[6] M. Etter, 1993, “Engineering Problem Solving with MATLAB”, Prentice-Hall, Inc.